La géométrie sous-riemannienne du problème de Didon

Tommaso Rossi

Pi Day au Lycée Louis le Grand

Mars 14, 2024

SORBONNE UNIVERSITÉ

Inria

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

1. Le problème de Didon
   - L'histoire et légende de Didon
2. La solution au problème de Didon
3. La géométrie sous-riemannienne du problème de Didon
   - Relèvement du problème dans $\mathbb{R}^3$
   - Le groupe de Heisenberg
   - La géométrie sous-riemannienne du problème de Didon

La reine Didon

- Au debut de 9ème siecle A.C naît Didon, princesse de Tyr (actuel Liban).
- $\sim$ 820 A.C. : Au mort du roi de Tyr, son frère Pygmalion assassine son époux afin de prendre le pouvoir. Didon, avec une suite nombreuse, s'enfuit vers l'Afrique du Nord.
- 814 A.C. : Didon atteint Byrsa (proche de l'actuel Tunis) et demande asile aux autochtones. Elle obtient pacifiquement des terres pour s'y établir, par un accord avec le seigneur local. Mais, on ne lui concède que ce que pourrait couvrir la peau d'un bœuf.

Figure: Didon abandonnée - A. Sacchi 1599–1661

La construction de Chartage - 814 A.C.

- Didon découpe la peau en si fines lanières qu'elle obtient, bout à bout, une corde de longueur de près de 4 km. Avec la corde ainsi formée, elle encercle son territoire et fonde la très célèbre ville de **Carthage**.

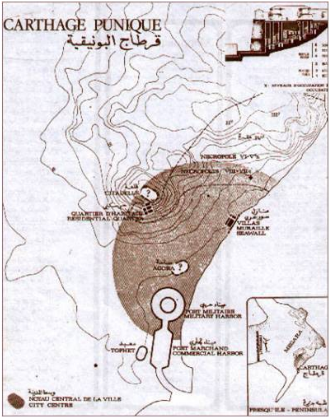


Figure: Carte de la Carthage punique (coloriée en gris)

Le problème de Didon

En formant un **arc de cercle** plutôt qu'un triangle, un rectangle, un carré ou tout autre forme géométrique sans point double, Didon avait donc admis la solution au problème isopérimétrique suivant :

Soit L une ligne donnée. De toutes les courbes, sans points double, dont les points initial et final sont sur L, et de longueur donnée, trouver celle qui (avec L) entoure l'aire la plus grande.

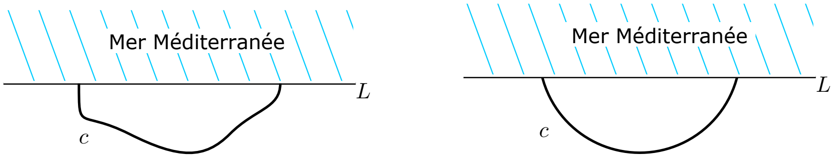


Figure: Les deux courbes ont la même longueur, mais l'aire entourée par la seconde est plus grande. Ici, L représente le littoral méditerranéen.

Plan de l'exposé

1. Le problème de Didon
   - L'histoire et légende de Didon
2. La solution au problème de Didon
3. La géométrie sous-riemannienne du problème de Didon
   - Relèvement du problème dans $\mathbb{R}^3$
   - Le groupe de Heisenberg
   - La géométrie sous-riemannienne du problème de Didon

La formalisation du problème de Didon

Soit $L = \{y = 0\}$ l'axe des x et soit $\ell \in (0, +\infty)$. Le problème de Didon est un **problème de maximisation sous contrainte** : trouver une courbe $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$\begin{cases} c(0), c(1) \in L, \\ \text{Longeur de } c = \ell; \\ \text{Aire obtenue entre } c \text{ et } L \longrightarrow \max \end{cases} \tag{D}$$

De manière explicite, soit $c(t) = (x(t), y(t))$ une paramétrisation de la courbe telle que $(x(0), y(0)) = (0,0)$. Alors, on a :

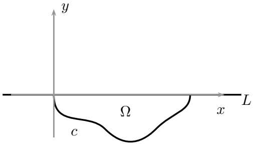


Figure: La région Ω a comme contour c et L.

- $\ell(c) = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s)}\, \mathrm{d}s;$
- $\mathscr{A}(c) = \int_\Omega \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int_0^1 (x(s)\dot{y}(s) - \dot{x}(s)y(s))\, \mathrm{d}s.$

La solution du problème de Didon - I

On utilise des téchniques de calcul des variations pour trouver la solution à (D):

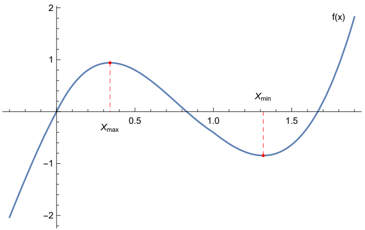
1. On suppose que c est une solution à (D) : $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ est une courbe telle que $c(0) = (0,0)$, $c(1) \in L$ et

$$\mathscr{A}(c) = \max_{\tilde{c}} \mathscr{A}(\tilde{c}) \quad \text{sous la contrainte} \quad \ell(c) = \ell,$$

2. Alors c est point critique de la **fonction lagrangienne** de ce problème, donnée par

$$\mathscr{L}(x(s), y(s), \dot{x}(s), \dot{y}(s)) := \underbrace{\frac{1}{2}(x(s)\dot{y}(s) - \dot{x}(s)y(s))}_{\text{intégrande de } \mathscr{A}(\cdot)} + \lambda \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s)}}_{\text{intégrande de } \ell(\cdot)},$$

où $\lambda \geq 0$ est le multiplicateur de Lagrange.



La fonction f a deux points critiques $x_{\min}$ et $x_{\max}$. Ils sont tels que

$$f'(x_{\min}) = f'(x_{\max}) = 0.$$

La solution du problème de Didon - II

3. Comme c est point critique de $\mathscr{L}$, on a :

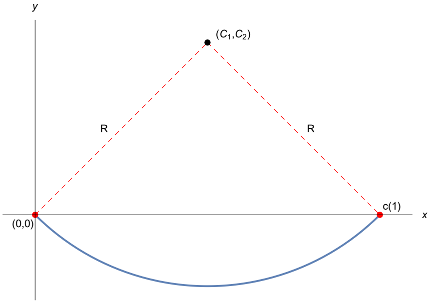
$$\nabla \mathscr{L}(c) = 0 \qquad \rightsquigarrow \textbf{ équations d'Euler-Lagrange.}$$

4. Nous résolvons les équations d'Euler-Lagrange associées à $\mathscr{L}$ et nous obtenons qu'ils existent deux constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ telles que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(x(t) - C_1)^2 + (y(t) - C_2)^2\right] = 0.$$

Donc, on trouve une constante $R > 0$ telle que

$$(x(t) - C_1)^2 + (y(t) - C_2)^2 = R^2.$$



$\rightsquigarrow$ Cela signifie que $c(t) = (x(t), y(t))$ paramètre un **arc de cercle** de centre (C_1, C_2) et rayon R.

Plan de l'exposé

Relever le problème dans $\mathbb{R}^3$ - I

But : "relever" le problème de Didon dans $\mathbb{R}^3$ et définir la structure géométrique associée à ce problème.

Soit $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ avec composantes $c(t) = (x(t), y(t))$ et supposons $c(0) = (0,0)$, $c(1) = (x_1, y_1)$. On rappel que

$$\mathscr{A}(c) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\dot{y}(s)x(s) - \dot{x}(s)y(s))\,\mathrm{d}s$$

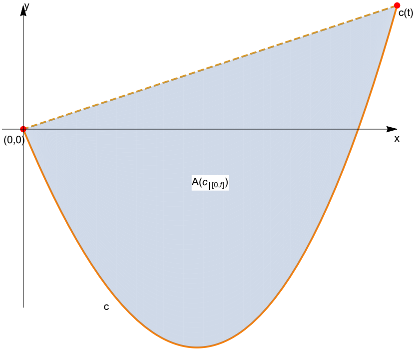
Ensuite, nous pouvons relever le problème dans $\mathbb{R}^3$, en définissant la composante additionnelle de c comme suit

$$z(t) := \mathscr{A}\left(c_{|[0,t]}\right) = \frac{1}{2}\int_0^t (\dot{y}(s)x(s) - \dot{x}(s)y(s))\,\mathrm{d}s.$$

La courbe $\gamma(t) := (x(t), y(t), z(t))$ a la propriété que $z(t)$ est l'aire de la région dans $\mathbb{R}^2$ délimitée par la projection $(x(s), y(s))$ et la ligne passant par l'origine et $(x(t), y(t))$.

$\rightsquigarrow$ Cette procédure nous permet de définir une géométrie non-euclidienne sur $\mathbb{R}^3$.

Relever le problème dans $\mathbb{R}^3$ - II



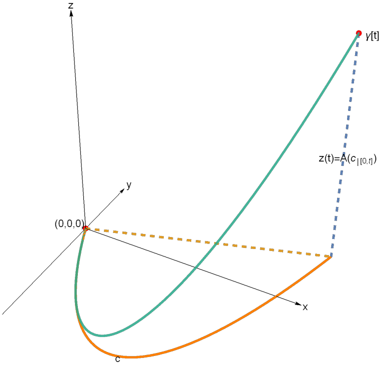
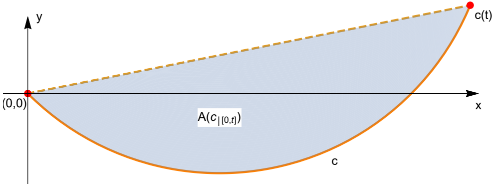


Figure: Une courbe quelconque en $\mathbb{R}^2$ est relevée uniquement à une courbe en $\mathbb{R}^3$.

Relever le problème dans $\mathbb{R}^3$ - III



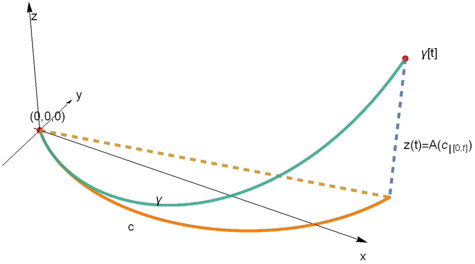


Figure: Un arc de cercle est relevé à un morceau de spirale.

Le groupe de Heisenberg - I

Nous définissons une géométrie **non-euclidienne** sur $\mathbb{R}^3$. Considérons la famille de plans donnée par

$$\mathcal{D}_{(x,y,z)} := \mathrm{span}\left\{X(x,y,z), Y(x,y,z)\right\},$$

où X et Y sont deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ définis par

$$X(x,y,z) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{y}{2} \end{pmatrix}, \qquad Y(x,y,z) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{D}$ est appelée **distribution** et elle a toujours dimension 2.

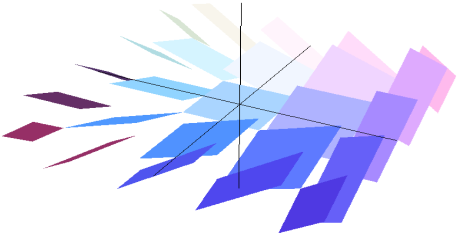


Figure: La distribution au points du plan $\{z = 0\}$.

Le groupe de Heisenberg - II

Nous définissons un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathcal{D}$, en déclarant X et Y orthonormés. Donc, pour tout $v, w \in \mathcal{D}_{(x,y,z)}$, on a

$$v = v_1 X(x,y,z) + v_2 Y(x,y,z), \qquad w = w_1 X(x,y,z) + w_2 Y(x,y,z),$$

ainsi que

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

On ne peut calculer le produit scalaire que pour les vecteurs sur $\mathcal{D}$.

Par exemple, le vecteur $(0,0,1)^T$ n'appartient pas à $\mathcal{D}$ et donc on ne peut pas évaluer sa norme.

Définition. Le **groupe de Heisenberg** $\mathbb{H}$ est $\mathbb{R}^3$ équipé de la distribution $\mathcal{D}$ et du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathcal{D}$.

$\rightsquigarrow$ Le groupe de Heisenberg est un exemple de **géométrie sous-riemannienne**.

Les courbes admissibles en $\mathbb{H}$ - I

Définition. Nous disons qu'une courbe $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ est **admissible**, si et seulement si elle est **tangente** à $\mathcal{D}_{\gamma(t)}$, c'est-à-dire :

$$\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}, \qquad \forall\, t \in [0,1].$$

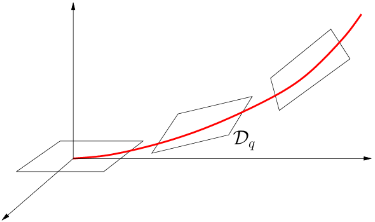


Figure: Une courbe admissible est tangente à la distribution

Rappel que le produit scalaire n'est défini que sur la distribution.

On ne peut que évaluer la vitesse des courbes admissibles!

Les courbes admissibles en $\mathbb{H}$ - II

Soit maintenant $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ et soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ son relèvement. Alors, $\gamma(t)$ est **admissible**. En effet, on a pour tout $t \in [0,1]$:

$$\dot{\gamma}(t) = \left(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \frac{1}{2}\left(\dot{y}(t)x(t) - \dot{x}(t)y(t)\right)\right) = \dot{x}(t)X(\gamma(t)) + \dot{y}(t)Y(\gamma(t)).$$

Une courbe est admissible si et seulement si elle est le relèvement d'une courbe $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

En rappelant que X, Y sont orthonormés, la vitesse de $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ est

$$\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}.$$

Alors, la longeur d'une courbe admissible γ en $\mathbb{H}$ est la même que celle de sa projection c en $\mathbb{R}^2$, notamment :

$$\ell_{\mathbb{H}}(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\,\mathrm{d}t = \ell(c).$$

$$\ell_{\mathbb{R}^3}(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\,\mathrm{d}t \neq \ell_{\mathbb{H}}(\gamma).$$

La géométrie sous-riemannienne du problème de Didon

Théorème

Une courbe admissible $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ est la courbe la plus courte de $\gamma(0) = (0,0,0)$ à $\gamma(1) = (x(1), y(1), z(1))$ dans $\mathbb{H}$ si et seulement si sa projection $c(t) = (x(t), y(t))$ est la solution du problème (dual) de Didon pour les courbes joignant $(0,0)$ et $c(1) = (x(1), y(1))$ avec une aire donnée de $z(1)$.

- Le problème dual de Didon : soit L une ligne donnée. De toutes les courbes, sans points doubles, dont les points initial et final sont sur L, et telle que elle entoure une aire donnée, trouver la plus courte.
- Les courbes les plus courtes entre deux points donnés sont appelées **géodésiques**. Dans $\mathbb{R}^3$, les géodésiques sont des lignes droites. Dans la géométrie non-euclidienne de $\mathbb{H}$, les géodésiques sont **spirales**.

Alors, le théorème dit que :

Géodésiques dans $\mathbb{H}$ $\iff$ Solutions au problème de Didon

Merci pour l'attention !

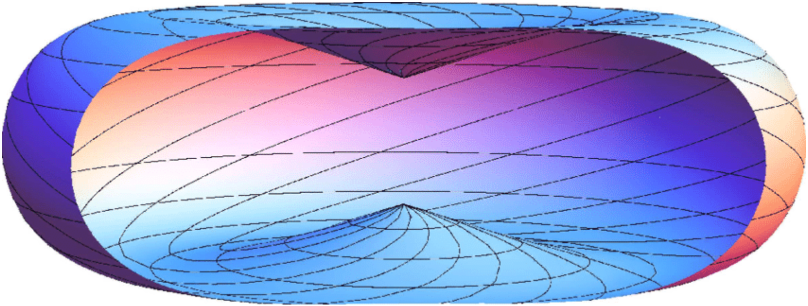


Figure: La boule unité du groupe de Heisenberg